Correction Devoir surveillé n°2

Exercice 1 - Étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans toute cette partie, on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{e^{u_n} - 1}{u_n}.$$

1. (a) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x - 1 \geq x \Longleftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$$

On pose donc la fonction $g : x \to e^x - x - 1$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) \quad = \quad e^x - 1$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff e^x - 1 > 0 \\ &\iff e^x > 1 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

On calcule également $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ afin d'en déduire le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de g		$-$		$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variation, le minimum de g est 0. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x - 1 \geq x}$$

(b) Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} xe^x - e^x + 1 &= xe^x\left(1 - \frac{e^x}{xe^x} + \frac{1}{xe^x}\right) \\ &= xe^x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}\right) \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} xe^x - e^x + 1 = +\infty.}$$

Pour la limite en $-\infty$, on a

— $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par croissance comparée

— $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x - e^x + 1 = 1.}$$

(c) On pose la fonction h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $h(x) = xe^x - e^x + 1$. Cette fonction est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} h'(x) &= e^x + xe^x - e^x \\ &= xe^x \end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant toujours positive, la dérivée de h est du signe de x. D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de h		$-$		$+$	
Variations de h	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction h est toujours positive et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, xe^x - e^x + 1 \geq 0}$$

2. On étudie dans cette partie la fonction $f : x \to \dfrac{e^x - 1}{x}$.

(a) $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$

(b) La fonction f est dérivable en tant que somme et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

D'après la question $1(c)$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \, f'(x) \geq 0}$$

La fonction f est donc croissante.

(c) On a $\lim_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$ et $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$$

Pour la limite en 0, on reconnait un taux d'accroissement

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.}$$

Enfin, on a

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{x}$$

et $\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissance comparée.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty.}$$

(d) L'équation de la tangente à f en $x = 1$ est donnée par $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$. Or

— $f'(1) = \frac{1 \times e - e + 1}{1^2} = 1$

— $f(1) = \frac{e - 1}{1} = e - 1$

$$\boxed{\text{L'équation de la tangente à } f \text{ en } x = 1 \text{ est } y = (x - 1) + e - 1 = x + e - 2.}$$

3. On cherche à tracer la fonction f sur l'intervalle $[1; 5]$ en utilisant Scilab.

(a)
```
function y = f(x)
    y = (exp(x) - 1)/x
endfunction
```

(b)
```
clf
x = 1 : 0.01:5
plot(x, f)
```

(c) On complète le programme avec la ligne

```
plot(x, x + exp(1)-2, 'r')
```

(d) La fonction f est croissante ce qui élimine les graphiques 2 et 4. De plus $f(1) = e - 1 \approx 1,7$ donc le bon graphique est le numéro 1.

4. On considère $u_0 = 1$.

(a) — On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n$: $\{u_n$ est bien définie et $u_n \geq 1\}$.

— **Initialisation :** La propriété $\mathscr{P}_0$ s'écrit "u_0 existe et $u_0 \geq 1$" or $u_0 = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. Donc $u_n \neq 0$ et ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. La fonction f étant croissante, on a

$$\begin{aligned} u_n \geq 1 &\implies f(u_n) \geq f(1) \\ &\implies u_{n+1} \geq e - 1 \geq 1 \end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geq 1.}$

(b) On va montrer par récurrence que la suite est croissante

— On montre par récurrence $\mathscr{P}_n$: $\{u_{n+1} \geq u_n\}$.

— **Initialisation :** La propriété $\mathscr{P}_0$ s'écrit "$u_1 \geq u_0$. Or $u_1 = f(u_0) = f(1) = e - 1$ et $u_0 = 1$. Ainsi, $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. La fonction f étant croissante, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} \geq u_n &\implies f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \\ &\implies u_{n+2} \geq u_{n+1} \end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

5.
```
n = input("Choisir un entier n")
u = 1
for k = 1:n
    u = (e^u - 1)/u
end
disp("Le 100eme terme de la suite est " +string(u))
```

Exercice 2 - Puissances de matrices

I - Cas d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n \end{cases}$$

ainsi que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Résolution numérique

1. Recopier et compléter le programme scilab suivant permettant de calculer les termes a_{100} et b_{100}.

```
//initialisation
a = ..1..
b = ..2..

// calculs
for k = 1: .100.
    temp = ..a..
    .a. = 3*a + b
    b    = ..-2*a..
end

// conclusion
disp('Le 100ème terme de la suite a est" + string(.a.))
disp('Le 100ème terme de la suite b est" + string(.b.))
```

Résolution en utilisant les suites

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 3a_{n+1} - 2a_n \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n}$$

3. On résout l'équation $x^2 = 3x - 2 \iff x^2 - 3x + 2 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 9 - 8 = 1$. Cette équation a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \lambda \times 1^n + \mu \times 2^n = \lambda + \mu \times 2^n.$$
Or $a_0 = 1$ et $a_1 = 3 + 2 = 5$ donc on a le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda + \mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 5 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu & = 1 \\ \mu & = 4 \end{cases} \quad L_2 - L_1 \to L_1 \\ &\iff \begin{cases} \lambda & = -3 \\ \mu & = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 4 \times 2^n - 3}$$

4. On a $b_n = -2a_n$ donc

$$\boxed{b_n = 6 - 8 \times 2^n}$$

Résolution en utilisant les matrices

5. La matrice P est une matrice 2×2. Son déterminant est $det(P) = 1 \times 2 - (-2) \times (-2) = -2$. Donc P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

6. On calcule
$$P^{-1}A = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

7. La matrice D est diagonale donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

8. On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{A^n = PD^nP^{-1}\}$.
   - **Initialisation :** On a $A^0 = I_2$ et $\mathscr{P}D^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ donc l'initialisation est vérifié.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n \times D \times P^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

   Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

9. On calcule

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2^{n+1} \\ -2 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

De même

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2^{n+1} \\ -2 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \times \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 2 - 2^{n+2} & 2 - 2^{n+1} \\ -4 + 2^{n+2} & -4 + 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

10. On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On a donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{X_{n+1} = \begin{pmatrix} 3a_n + b_n \\ -2a_n \end{pmatrix} = AX_n}$$

11. On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{X_n = A^nX_0\}$.
   - **Initialisation :** La proposition $\mathscr{P}_0$ s'écrit $X_0 = A^0X_0 = X_0$ donc l'initialisation est vérifié.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A \times A^nX_0 \\ &= A^{n+1}X_0 \end{aligned}$$

   Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0}$.

12. On a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1+2^{n+1}-2 \\ 2-2^{n+1}+4-2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 \\ 6-2^{n+2} \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

On retrouve les résultats précédents.

II - Cas d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on introduit les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif est de calculer B^n pour tout entier n.

1. Le script Scilab :

```
B = [2,0,2 ; 1,-1,2 ; 0,-1,1]
n = input("Entrez un entier n:")
disp(B^n)
```

2. On a alors

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(B-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Enfin,

$$B \times (B-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par l'absurde, supposons que la matrice B soit inversible. Dans ce cas,

$$\begin{gathered} B \times (B-I_3)^2 = 0 \Longrightarrow B^{-1} \times B \times (B-I_3)^2 = B^{-1} \times 0 \\ (B-I_3)^2 = 0 \end{gathered}$$

Or on a vu précédemment que $(B-I_3)^2 \neq 0$. C'est absurde !

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ B n'est donc pas inversible.}}$$

3. On calcule
$$C(C-I_3)=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\-1&1&-2\\1&0&2\end{pmatrix}$$
et
$$C(C-I_3)(2I_3-C)=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\-1&1&-2\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\boxed{\text{On a donc obtenu } C(C-I_3)(2I_3-C))=I_3.}$$

4. D'après la question précédente, C est inversible et
$$\begin{aligned}C^{-1}&=(C-I_3)(2I_3-C)\\&=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\\&\boxed{=\begin{pmatrix}-1&3&1\\1&-1&0\\1&-2&0\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

5. On calcule alors
$$C^{-1}\times T=\begin{pmatrix}-1&3&1\\1&-1&0\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$
ainsi que
$$C^{-1}\times T\times C=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&-1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$$
Donc, on a bien
$$\boxed{B=C^{-1}\times T\times C.}$$

6. On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n:\left\{T^n=\begin{pmatrix}0&1&n+1\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$.

   - **Initialisation :** La proposition $\mathscr{P}_1$ s'écrit $T^1=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ donc l'initialisation est vérifié.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n\geq 1$. On a alors
$$\begin{aligned}T^{n+1}&=T^n\times T\\&=\begin{pmatrix}0&1&n+1\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&1&1+n+1\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&1&n+2\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$
   Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

7. On calcule donc à l'aide de $B^n = C^{-1}T^nC$ la puissance n-ième de la matrice B,

$$C^{-1}T^n = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -n-1+3n+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & n+1-2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -n+1 \end{pmatrix}$$

et

$$B^n = C^{-1}T^nC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2n & 2-2n & -2+4n \\ 1 & -1 & 2 \\ 1-n & n-2 & 3-2n \end{pmatrix}}$$

Exercice 3 - ECRICOME 2011

PARTIE I. Un jeu en ligne.

1. Les positionnement sont déterminés par l'ensembles (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9. il y en a donc $\binom{9}{3} = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = 3\cdot4\cdot7 = 84$
2. (H) est formé de 3 positionnements : ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables (on le suppose) donc $\mathrm{P}(H) = \dfrac{3}{84}$

   (V) est formé de 3 positionnements : colonne A, B ou C donc $\mathrm{P}(V) = \dfrac{3}{84}$

   (D) comporte es deux diagonales descendants et ascendantes. Donc $\mathrm{P}(D) = \dfrac{2}{84}$
3. (H, V, D, N) étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N) &= 1 - \mathrm{P}(V) - \mathrm{P}(H) - \mathrm{P}(D) \\ &= 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21} \\ &= \frac{19}{21} \simeq 0.9048 \end{aligned}$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

   (a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance.
   Lors de la *ième* relance, la société peux gagner 2 euros (la mise) si N ou en perdre 18 sinon. Donc $Z_i(\Omega) = \{2, -18\}$. avec $\mathrm{P}(Z_i = 2) = \mathrm{P}(N) = \frac{19}{21}$ et $\mathrm{P}(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$, donc

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= 2\frac{19}{21} - 18\frac{2}{21} \\ &= \frac{38-36}{21} = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{E(Z_i) = \frac{2}{21} \simeq 0,1}$

   (b) le gain total est la somme des gains à chaque relance donc $Z = \sum Z_i$ et $E(Z) = 10000\cdot\frac{2}{21} \simeq 1000$
   Conclusion : $\boxed{\text{En moyenne, la société gagnera à peu près 1000€ par jour}}$, mais elle peut espérer beaucoup plus !

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un Joueur décide de ,jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.

   (a) X est le nombre de parties gagnées en 100 parties indépendantes, la probabilité de gagné chacune étant de $\frac{2}{21}$

   Conclusion : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(100, \frac{2}{21}\right)}$ (loi binomiale)

   (b) on a donc $\boxed{E(X) = \frac{200}{21} \text{ et } V(X) = \frac{2}{21}\frac{19}{21}10}$ (formules du cours)

   (c) En 100 parties, X sont gagnées (gain $18X$) et $100 - X$ perdues (perte $2(100 - X)$)
   La perte totale est donc $T = 2(100 - X) - 18X = 200 - 20X$
   (On peut compter différemment : il mise 200 et reçoit 20 par partie gagnée donc $20X$)
   Conclusion : $\boxed{T = 200 - 20X}$

2. Avec n parties au lieu de 100, l'événement $U =$ "gagner au moins une partie" est l'événement contraire de $(X = 0)$
   $\mathrm{P}(X = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{2}{21}\right)^0\left(\frac{19}{21}\right)^n$
   Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(U) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n &\geq 0.5 \\
\iff \left(\frac{19}{21}\right)^n &\leq \frac{1}{2} \\
\iff n\ln\left(\frac{19}{21}\right) &\leq -\ln(2) \ \ (\text{attention } \ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0) \\
\iff n &\geq \frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \simeq \frac{0,7}{0.1}
\end{aligned}$$

Conclusion : il faut jouer au moins 7 (ou 8) partie pour en gagner au moins une avec une probabilité supérieure à 50%

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée »et on pose $\mathrm{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Sachant Δ, les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes.
   Il y a donc $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$ positionnements possibles et équiprobables.
   (H) est à présent réduit à la ligne 1, V à la colonne A et D à la diagonale descendante.
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_\Delta(H) = \mathrm{P}_\Delta(V) = \mathrm{P}_\Delta(D) = \frac{1}{28}}$

2. On a donc $\mathrm{P}_\Delta(N) = 1 - \dfrac{3}{28} = \dfrac{25}{28}$
   Sachant $\overline{\Delta}$, l'expérience se fait dans les conditions de la partie I et les probabilités sont donc celle de la partie I : $\mathrm{P}_{\overline{\Delta}}(N) = \dfrac{19}{21}$

$\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ est un système complet d'événement donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N) &= \mathrm{P}_{\overline{\Delta}}(N) \cdot \mathrm{P}(\Delta) + \mathrm{P}_{\Delta}(N) \cdot \mathrm{P}(\Delta) \\
&= x\frac{25}{28} + (1-x)\frac{19}{21} \\
&= x\frac{25}{4\cdot 7} + (1-x)\frac{19}{3\cdot 7} \\
&= \frac{25\cdot 3 - 19\cdot 4}{3\cdot 4\cdot 7}x + \frac{19}{21} \\
&= -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à } \mathrm{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}}$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée.
   On a donc $\mathrm{P}(G=2) = \mathrm{P}(N)$ et $\mathrm{P}(G=-18) = \mathrm{P}\left(\bar{N}\right) = 1 - \mathrm{P}(N)$
   Donc

$$\begin{aligned}
E(G) &= 2\left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right) - 18\left(1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21}\right) \\
&= -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21}
\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}
E(G) > 0 &\iff -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} > 0 \\
&\iff x < \frac{2}{21}\frac{84}{20} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{le gain moyen reste positif tant que } x < \frac{2}{5}}$

4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés.
   la fonction aléatoire a été déréglée si Δ
   On cherche donc $\mathrm{P}_{\bar{N}}(\Delta)$ par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{\bar{N}}(\Delta) &= \frac{\mathrm{P}\left(\Delta \cap \bar{N}\right)}{\mathrm{P}\left(\bar{N}\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(\Delta)\,\mathrm{P}_{\Delta}\left(\bar{N}\right)}{\mathrm{P}\left(\bar{N}\right)} \\
&= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{1 - \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right)} \\
&= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{9x}{x+8}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Si les jetons sont alignés, la fonction aléatoire a été déréglée} \\ \text{avec une probabilité } \dfrac{9x}{x+8}\end{array}}$

Exercice 4 - Sommes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 . Le but de cet exercice est de calculer la somme :

$$S=\sum_{p=0}^{n} p^{2}\binom{2n}{2p}$$

Pour cela on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}$$

1. (a) La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$f'(x)=2n(1+x)^{2n-1}-2n(1-x)^{2n-1}$$

Cette fonction est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f''(x)=2n(2n-1)(1+x)^{2n-2}+2n(2n-1)(1-x)^{2n-2}$$

(b) On a donc

$$\boxed{f'(1)=2n2^{2n-1}=n2^{2n}}$$

et

$$\boxed{f''(1)=2n(2n-1)2^{2n-2}=n(n-1)2^{2n}}$$

2. (a) On rappelle que

$$\boxed{(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^{k}}$$

et

$$\boxed{(1-x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-x)^{k}}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
f(x)&=(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}\\
&=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^{k}+\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-x)^{k}\\
&=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^{k}+(-x)^{k}
\end{aligned}$$

On a alors

$$x^{k}+(-x)^{k}=\begin{cases}2x^{k} & \text{si } k \text{ est pair}\\ 0 & \text{si } k \text{ est impair}\end{cases}$$

Or k est pair s'il est de la forme $2p$ avec p compris entre 0 et n donc

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=2\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}x^{2p}}$$

(b) On a alors en utilisant la somme précédente

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} 2px^{2p-1} \\ &= 4\sum_{p=0}^{n} p \binom{2n}{2p} x^{2p-1} \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{f'(1) = 2\sum_{p=0}^{n} 2p \binom{2n}{2p}}$$

Et enfin

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} 2px^{2p-1} \\ &= 2\sum_{p=0}^{n} 2p \binom{2n}{2p} (2p-1)x^{2p-2} \\ &= 2\sum_{p=0}^{n} 2p(2p-1) \binom{2n}{2p} x^{2p-2} \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{f''(1) = 2\sum_{p=0}^{n} 2p(2p-1) \binom{2n}{2p}}$$

3. On remarque que $p^2 = \frac{1}{4}2p(2p-1) + \frac{1}{4}2p$, on a donc

$$\begin{aligned} S &= \sum_{p=0}^{n} p^2 \binom{2n}{2p} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{1}{4}2p(2p-1) + \frac{1}{4}2p\right) \binom{2n}{2p} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{n} 2p(2p-1) \binom{2n}{2p} + \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{n} 2p \binom{2n}{2p} \\ &= \frac{1}{8}f''(1) + \frac{1}{8}f'(1) \\ &= \frac{1}{8}\left(n2^{2n} + n(n-1)2^{2n}\right) \\ &\boxed{= \frac{n^2 4^n}{8}} \end{aligned}$$